Step 19. Движение по окружности. Вращение

	**Задача 32.** **Конец минутной стрелки часов на Спасской башне Кремля за 1 минуту прошёл путь $S = 0{,}4$ м. Определите длину минутной стрелки l.**

Рассуждения. ***До сей поры мы рассматривали или прямолинейное движение (траектория – прямая линия) или движение по параболической траектории, которая, впрочем, возникала из сложения двух прямолинейных.***

Но движение, вообще говоря, может быть и криволинейным. Траектория – кривая линия. А что такое кривая линия? Это всё, что не прямая. Нарисуй левой пяткой с закрытыми глазами какую-нибудь линию – и выйдет кривая!

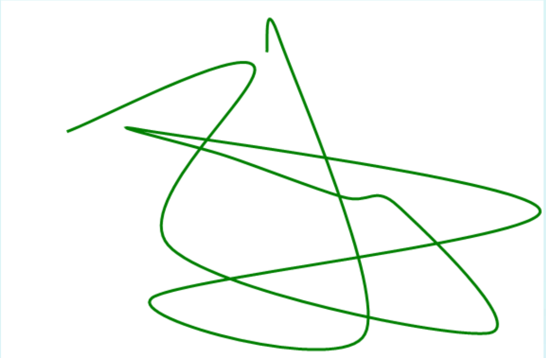


Рисунок – Случайная кривая линия

Понятно, что разного вида кривых линий невообразимое множество! Мы для изучения в школе выбираем лишь одну из кривых линий, очень примечательную и даже красивую кривую линию – окружность.

Решение задачи.* *Конец стрелки часов совершает движение по окружности. Это движение, разумеется, равномерное, что вытекает из конструкции часов. Прикольно бы было, если во время урока стрелки часов двигались бы быстрее, а на переменах и по выходным – медленнее.

Имеем классическое равномерное движение, где дан пройденный путь S, время t. Требуется найти скорость. В системе СИ t = 60 с.

$$v = \frac{S}{t} = \frac{0,4}{60} = 0,0067\,\textit{м/с}$$

Полную окружность, длина которой равна $2\pi r$, конец стрелки описывает за 60 минут, или в системе СИ за 3600 секунд. Поэтому

$$2\pi r = 3600v = 3600 \cdot 0,0067 = 24,12\,\boldsymbol{м}$$

Длина минутной стрелки – это длина радиуса, поэтому

$$l = \frac{24,12}{2\pi} = \frac{24,12}{2 \cdot 3,14} \approx 3,8\,\boldsymbol{м}$$

Ответ 3,8 м

Угловая скорость. ***Задача любопытная, и даже познавательная (вот она, оказывается, какая стрелка кремлёвских часов, в два человеческих роста!). Но осталась какая-то логическая неудовлетворённость. Скорость вращающегося тела не очень удобно вычислять по формуле (1), как скорость поступательно движущегося тела. При поступательном движении все точки тела описывают одинаковую траекторию и движутся с одинаковой скоростью. При вращательном движении точка, расположенная ближе к концу стрелки, движется быстрее, чем точка, расположенная ближе к оси вращения. Мы, когда смотрим на часы, отслеживаем не движение стрелки, а угол её поворота!***

Отсюда логично, скоростью равномерного вращения тела считать отношение угла его поворота φ к промежутку времени t, в течение которого произошёл поворот. И назовём её не просто скоростью, а угловой скоростью ω (эта греческая буква называется «омега»).

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \quad (9)$$

Давай найдём угловую скорость вращения минутной стрелки часов. Я сначала написал «кремлёвских» часов, но потом вычеркнул – размер стрелки для угловой скорости не имеет значения. Любых часов.

Например, за 15 минут стрелка поворачивается на угол 90^0. 15 минут = 60× 15 = 900 с. Угловая скорость

$\omega = \frac{90}{900} = 0{,}1$ ***градуса в секунду***

Меры длины мы привыкли (надеюсь, уже привыкли?) переводить в СИ, в метры, чтобы все исходные данные были в соизмеримых единицах. Градусы – это мера углов, тоже не очень приветствуемая физиками. В системе СИ для измерения углов используют радианы. Ты проходил это по тригонометрии.

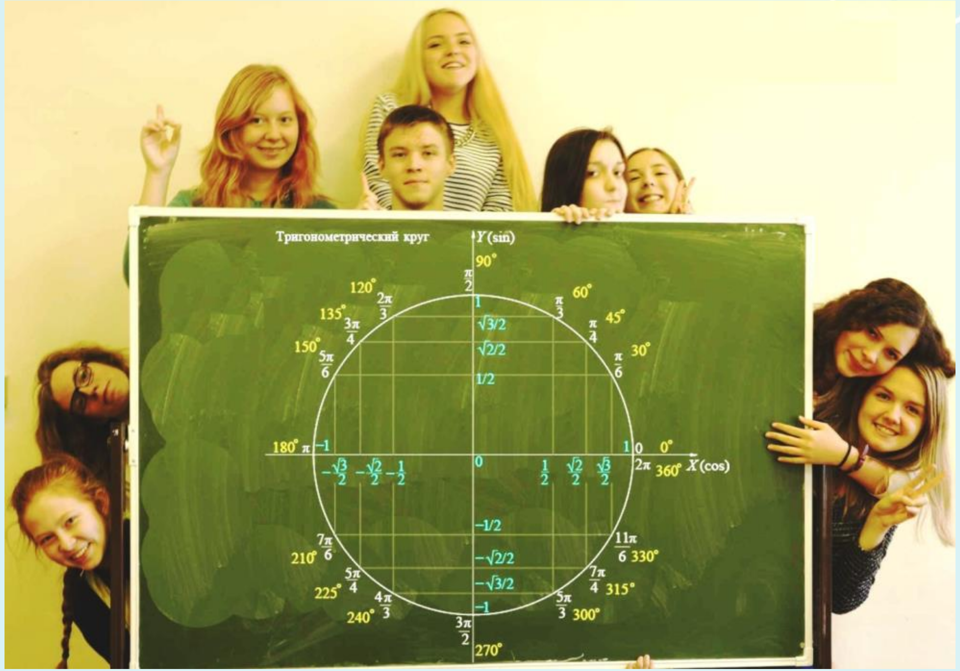


Рисунок – Тригонометрическая окружность

Вся окружность, 360^0, в радианах равна 2π***. Половина окружности, 180^0, в радианах равна*** π ***.***

Четверть окружности, 90^0 в радианах равна $\dfrac{\pi}{2}$ ***. И так далее.***

Найдём по формуле (9) угловую скорость минутной стрелки часов, но уже в правильных единицах системы СИ, в радианах

$$\omega = \frac{\pi}{2 \cdot 900} = \frac{\pi}{1800} \approx 0,017$$ ***рад/с***

Частота вращения. ***В технике применяется устаревшая единица скорости вращения – оборотов в минуту. Эта единица родилась двести лет назад, в эпоху тихоходных паровых машин, когда на вал наносили метку белой краской и прямо - таки глазами считали обороты в минуту. Эта единица называется не скоростью, а частотой вращения. Обозначают буквой ν (это греческая буква «ню»; она похожа на латинскую v, которой мы обозначали скорость, но это не «вэ»).***

$$\nu = \frac{N}{t},$$

где N – число оборотов.

Но физики – любители единиц СИ (к которым не относятся ни минуты, ни тем более «число оборотов») предпочитают частоту вращения тела выражать иначе. Время, за которое тело совершает один оборот, называют периодом, и обозначают буквой Т. Время (от лат.tempus) всегда обозначают буквой t. Но обычно t малое. Период – это тоже время, но всё же особое – это время одного оборота. Поэтому договорились период обозначать Т (большое). Период, конечно, в системе СИ измеряется в секундах.

А теперь посмотрите на такое наблюдение:

Если T = 1 с, то за 1 секунду тело обернется вокруг оси 1 раз;

Если T = 2 с, то за 1 секунду тело обернется вокруг оси 0,5 раза;

Если T = 3 с, то за 1 секунду тело обернется вокруг оси 1/3 раза;

Если T = 0,5 с, то за 1 секунду тело обернется вокруг оси 2 раза;

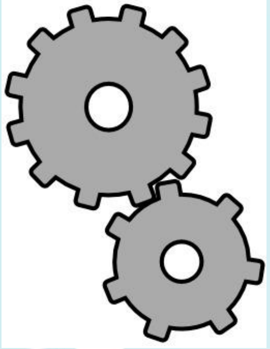
Если T = 0,1 с, то за 1 секунду тело обернется вокруг оси 10 раз.

Немного поразмыслив над этим наблюдением, мы согласимся с формулой

$$\nu = \frac{1}{T} \quad \textbf{(10)}$$

Частота обратно пропорциональна периоду. Если период в секундах, то в каких единицах измеряется частота? В секундах, которые в знаменателе. Как это записать? Помнишь математику? Возведение в отрицательную степень? Да, частоту в СИ измеряют в таких непростых единицах с$^{-1}$. (секунда в минус первой степени).

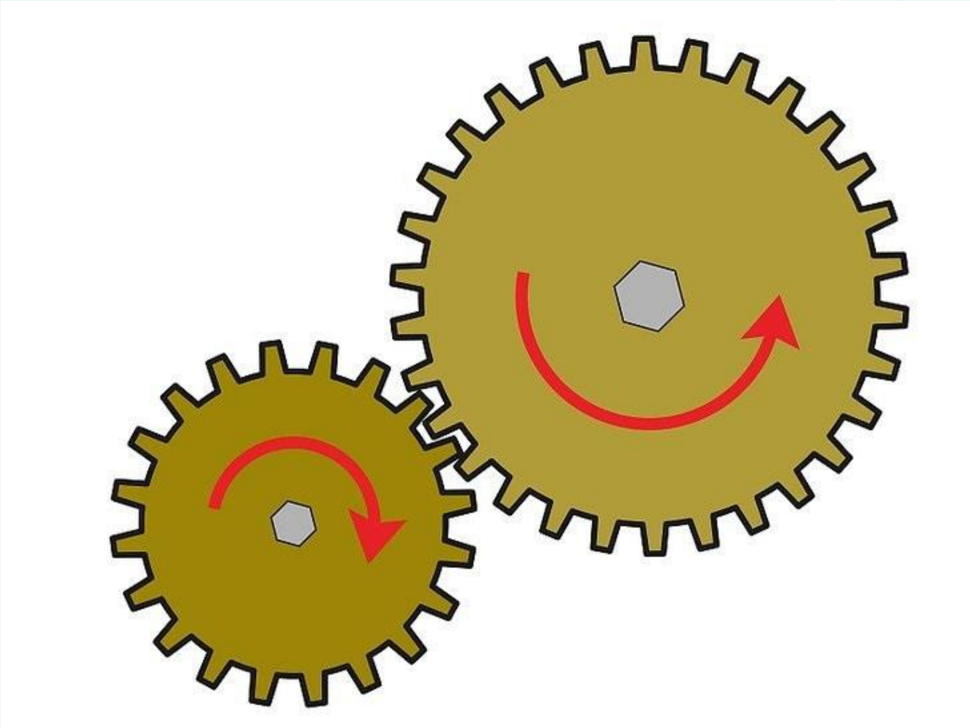
Реши-ка задачку на осмысление данных понятий



Задача 33. ***Две шестерни, сцепленные друг с другом, вращаются вокруг неподвижных осей. Большая шестерня радиусом 10 см делает 20 оборотов за 10 с, а частота обращения меньшей шестерни равна 5 $с^{-1}$. Чему равен радиус меньшей шестерни?***

Рассуждение и решение. Если ты вдруг не знаешь, шестерни – это зубчатые колёсики, которые применяются, например, в часовом механизме, в переключателе скоростей автомобиля, во многих технических устройствах. У них всегда сцеплены зубья, а диаметр и число зубьев на разных шестернях различное. Поэтому с их помощью можно или ускорять или замедлять вращение.

Рисунок – Шестерни (зубчатые колеса)



Концы зубьев совершают движение по окружности, их линейная скорость может быть вычислена по формуле (1), как мы это уже делали при решении задачи 32.

$$v = \frac{S}{t}$$

Причём, исходные данные мы возьмём такие: пройденный путь S – это длина окружности, которую зуб проходит за один полный оборот. ($S = 2\pi R$). А время, в течение которого полный оборот пройден – это период T(t = T). Тогда

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Эта формула, позволяющая вычислить линейную скорость зуба шестерни через её радиус и период вращения.

Для большой шестерни $v_б = \dfrac{2\pi R}{T_б}$

Для малой шестерни $v_м = \dfrac{2\pi r}{T_м}$

Поскольку зубья шестерен находятся в постоянном зацеплении (без проскальзывания), то концы зубьев имеют одинаковые линейные скорости.

$v_б = v_м \quad \frac{2\pi R}{T_б} = \frac{2\pi r}{T_м}$ ***после упрощения*** $\frac{R}{T_б} = \frac{r}{T_м}$ ***откуда*** $r = \frac{RT_м}{T_б}$

Подготовим исходные данные:

Радиус большой шестерни в СИ R = 0.1 м

Большая шестерня делает 20 оборотов за 10 секунд, то есть 2 оборота за 1 секунду, то есть 1 оборот за 0,5 с. $T_б = 0,5$ с.

$\nu_м$ **= 5** $^{с^{-1}}$ ***Отсюда*** $T_м = \dfrac{1}{\nu_м} = \dfrac{1}{5} = 0,2$ *с*

Решаем $r = \dfrac{RT_м}{T_б} = \dfrac{0,1 \cdot 0,2}{0,5} = 0,04м$

Ответ 0,04 м