

Step 18. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Сказка.



Помнишь выбор жён, который устроил для своих сыновей креативный царь-папаша?пустил стрелу старший брат — упала она на боярский двор, подняла стрелу боярская дочь.пустил средний брат — упала стрела на купеческий двор, подняла её купеческая дочь.пустил младший брат — попала стрела на болото, и подхватила ее лягушка-квакушка. Закончилось всё это, ты знаешь, неплохо, но поначалу Иван-царевич сильно напрягся.

Но – пацан достиг брачного возраста – и при этом ни бум-бум в физике? Ведь полёт стрелы и падение её в нужном месте несложно рассчитать.



Задача 31. Стрела из лука выпущена со скоростью 20 м/с под углом 50° к горизонту. Найти время полёта стрелы, максимальную высоту подъёма и дальность полёта.

(Мы, выбрали задачу посложнее, Ивану-царевичу надо было посчитать только дальность полёта)

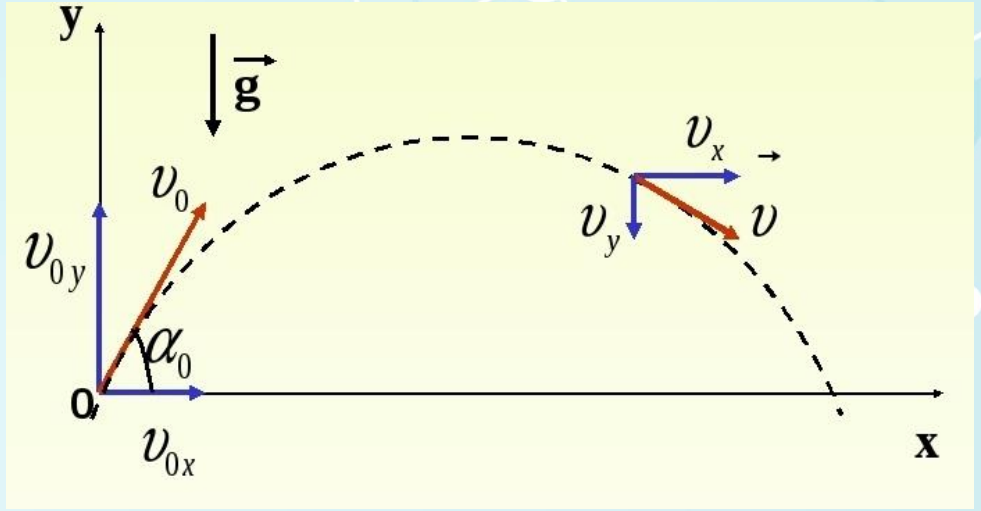


Рассуждения. Видел ли ты по телеку лыжную гонку? Мчится лыжник, ритмично двигает руками и ногами, а фоном за ним мелькают деревья, флажки, кричащие болельщики. Как это снимают? Если поставить неподвижную камеру, то фон будет неподвижен, а лыжник промелькнёт перед объективом за долю секунды. Картинка получится ни о чём. Лыжника

снимают движущейся камерой. Камера установлена на специальной тележке, тележка движется параллельно лыжнику с такой же скоростью, поэтому мы и видим лыжника - размахивающего руками, с учащённым дыханием, но относительно камеры неподвижного!

Вообразите, что стрелу Ивана-царевича мы будем тоже снимать движущейся камерой. Горизонтально, вдоль поверхности земли, стрела будет двигаться равномерно с той самой начальной скоростью, с которой её выпустили из лука. Тележка с камерой едет параллельно с такой же скоростью. Что же зафиксирует камера? Она фиксирует подъём стрелы вверх, остановку в наивысшей точке полёта, и падение вниз. Такую ситуацию, которую мы обсуждали в 16 степе.

Полёт стрелы (а так же снаряда из пушки, мяча после удара вратаря) происходит по так называемой баллистической траектории. От слова «баллистика», которая и занимается расчётом оружейных выстрелов. Эта траектория кривая, как показано на рисунке ниже, но она есть результат сложения двух движений: вертикального взлёта вверх и затем падения вниз + горизонтального полёта с постоянной скоростью.



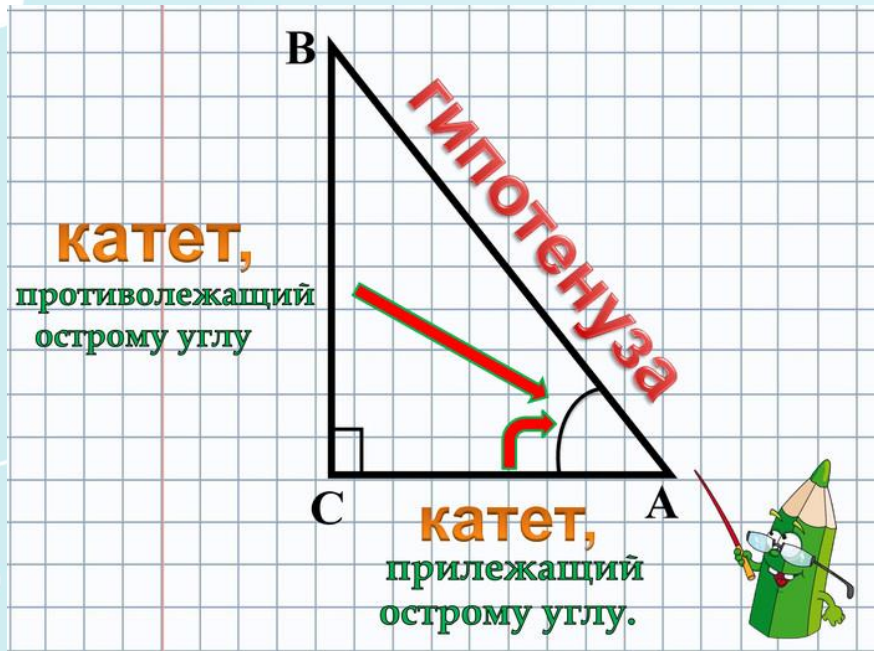
Вертикальное движение описывается формулой (8)

$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{gt^2}{2}$$

А горизонтальное – формулой (2)

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

*В каждой из этих формул присутствует проекция начальной скорости \vec{v}_0 на какую-нибудь координатную ось. В формуле (8) на ось y ; в формуле (2) на ось x . Нам же дана просто скорость (а не проекция). Но поскольку скорость – это **вектор**, то дано и направление – под углом 50° к горизонту.*



Давай вспомним геометрию где-то класс за седьмой, когда мы впервые узнали понятия синуса и косинуса.

В прямоугольном треугольнике стороны называются так: гипотенуза и два катета. Гипотенуза AB – это самая длинная сторона, которая лежит против прямого угла. А катеты различают вот как: для острого угла A катет BC является противолежащим, лежит против угла A . Катет AC является прилежащим, он прилегает к углу A ,

прилегает так, что является одной из сторон-лучей угла A .

Синусом угла A называется отношение противолежащего катета к гипотенузе

$$\sin A = \frac{\text{противолежащий}}{\text{гипотенуза}} = \frac{BC}{AB}$$

Косинусом угла A называется отношение прилежащего катета к гипотенузе

$$\cos A = \frac{\text{прилежащий}}{\text{гипотенуза}} = \frac{AC}{AB}$$

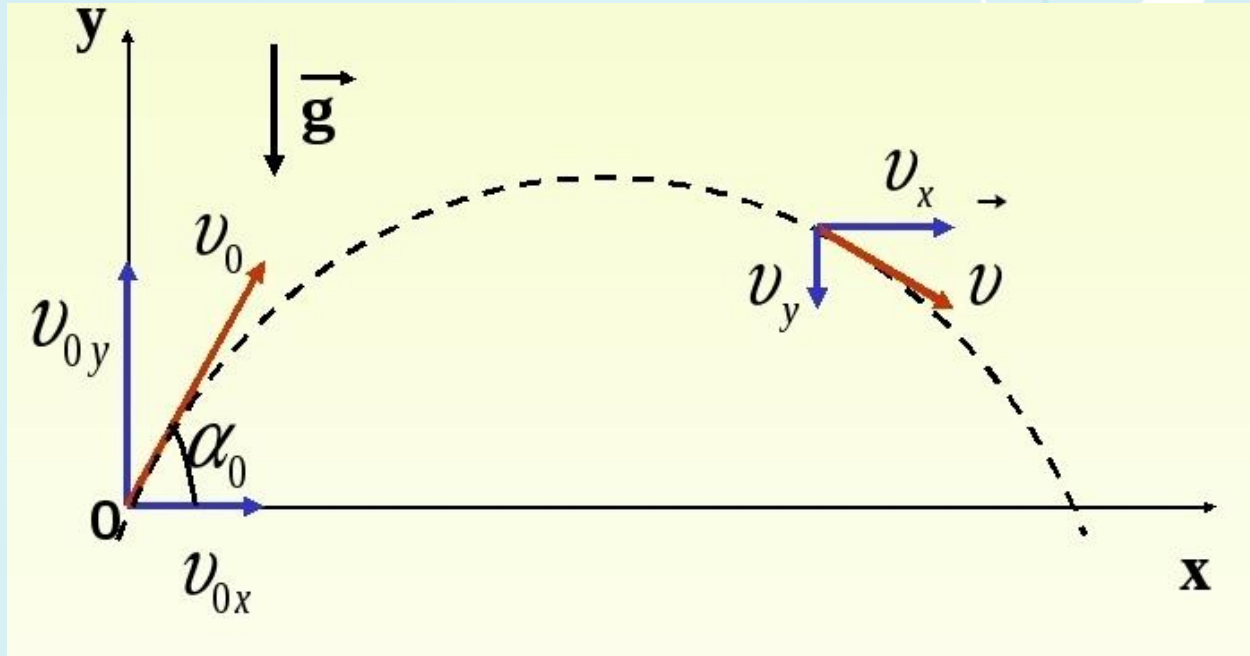
Если известны гипотенуза и угол, то катеты находятся так:

$$\text{противолежащий} = \text{гипотенуза} \times \sin A$$

$$\text{прилежащий} = \text{гипотенуза} \times \cos A$$

Для чего нам понадобился этот экскурс в геометрию? Посмотри на рисунок нашей баллистической траектории. Совершенно очевидно, что проекция скорости на ось x – это прилежащий катет, то есть вектор скорости надо умножить на косинус.

Проекция скорости на ось y равна противолежащему катету, то есть вектор скорости надо умножить на синус.



$$v_{0x} = v_0 \cos A; \quad v_{0y} = v_0 \sin A$$

Теперь можно приступать к задаче.

1) Найдём время полёта стрелы до наивысшей точки подъёма. В определительной формуле ускорения

$-g = \frac{v_y - v_{0y}}{t}$ положим $v_y = 0$ (потому что когда стрела достигла высшей точки подъёма, она

остановилась). Тогда $-g = \frac{-v_{0y}}{t}$;

$$t = \frac{-v_{0y}}{-g} = \frac{-v_0 \sin \alpha}{-g} = \frac{20 \cdot 0,77}{10} = 1,54 \text{ с}$$

В 15-ом степе мы отмечали, что подъём и падение – явления симметричные. Сколько времени длится подъём – столько же времени длится и падение. Поэтому, общее время полёта стрелы в два раза больше, чем только что вычисленное $2t = 1,54 \cdot 2 = 3,08 \approx 3,1$ с

2) Найдём максимальную высоту подъема. Это легко, учитывая, что мы нашли время подъёма до максимальной высоты. В уравнении (8)

$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{gt^2}{2}$$

$y_0 = 0$, а время $t = 1,54$ с

$$y = v_{0y} \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2} = 20 \cdot 0,77 \cdot 1,54 - \frac{10 \cdot 1,54^2}{2} = 11,858 \approx 12 \text{ м}$$

3) И, наконец, третье задание, особенно интересное для Ивана-царевича – дальность полёта стрелы (если он, конечно, знает географию родного края, в частности – на каком расстоянии от царского двора находится болото).

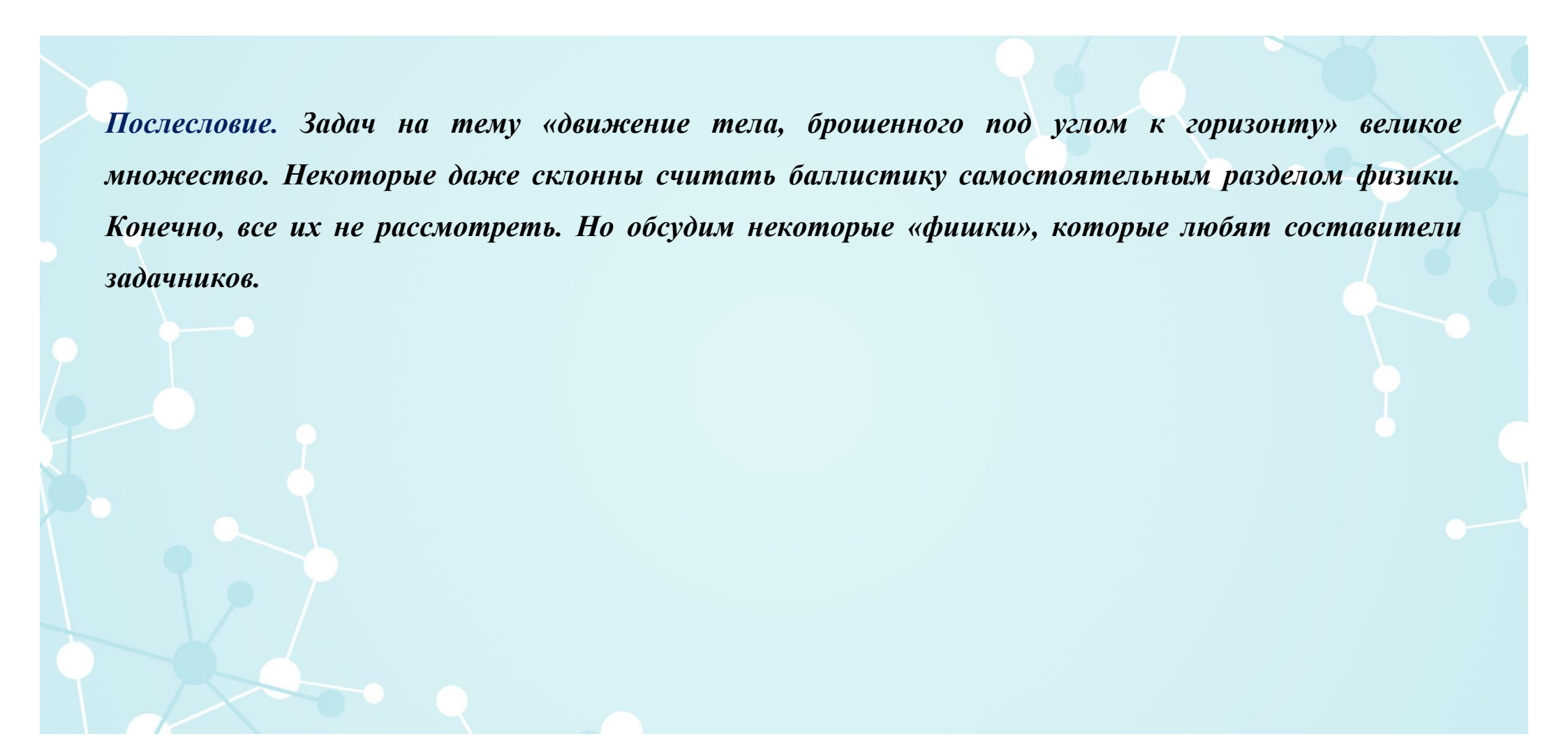
$$x = x_0 + v_{0x}t$$

x_0 примем равным нулю, поскольку мы, выбирая систему координат, вправе располагать оси, как угодно, и мы совмещаем начало координат с местом пуска стрелы. Время в этом уравнении – это общее время полёта стрелы, мы его уже нашли в пункте 1, оно равно 3,1 с.

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos \alpha \cdot t = 20 \cdot 0,64 \cdot 3,1 = 39,68 \approx 40 \text{ м}$$

Вот как далеко улетит стрела!

Ответ 3,1с; 12 м; 40 м



Послесловие. Задач на тему «движение тела, брошенного под углом к горизонту» великое множество. Некоторые даже склонны считать баллистику самостоятельным разделом физики. Конечно, все их не рассмотреть. Но обсудим некоторые «фишки», которые любят составители задачников.

1) Шарик брошен под углом к горизонту. Как изменяются по мере приближения к земле: модуль ускорения; горизонтальная составляющая скорости шарика; вертикальная составляющая скорости шарика?

Ответ: ускорение, мы говорили, постоянно, оно никак не изменяется, ни по величине, ни по модулю. Горизонтальная составляющая скорости тоже во всё время полёта никак не изменяется – ведь движение в горизонтальном направлении равномерное, то есть скорость – constanta. А вертикальная составляющая максимальна внизу, она убывает по мере подъёма и становится равной нулю в самой верхней точке полёта, затем прирастает в ходе падения и к концу падения опять достигает максимального (такого, как в момент пуска) значения.

2) Стрелу выпустили из лука под углом к горизонту. На какую максимальную высоту поднялась стрела, если через 4 секунды после выстрела её скорость была направлена горизонтально?

Решение. Тебя не должна смутить такая формулировка. Скорость стрелы – есть векторная сумма горизонтальной и вертикальной составляющих. Находится по правилу параллелограмма (в нашем случае – прямоугольника). Если скорость направлена горизонтально – это значит, вертикальная составляющая равна нулю. А такое бывает, если стрела достигла максимально верхней точки траектории. Дальше реши сам.

3) А ещё встретил задачу, где спрашивается: Чему равна минимальная скорость стрелы? Имеется в виду то же самое – скорость стрелы это горизонтальная + вертикальная составляющая. Когда вертикальная составляющая равна нулю – то и общая скорость минимальна.